

La transformation de Laplace :

un outil pour résoudre des équations

La transformation de Laplace ramène la résolution de problèmes difficiles (équations différentielles) à celle de problèmes beaucoup plus aisés (équations algébriques).

Equations algébriques et équations différentielles

Pour trouver la distance du trajet en taxi payé 80 francs, sachant que le prix comprend un forfait de 35 francs et une taxe de 2,50 francs par kilomètre, on apprend au collège à résoudre l'équation $2,50x + 35 = 80$. C'est une **équation algébrique du premier degré**.

Pour trouver le temps mis par un projectile lancé verticalement à 100 m/s pour atteindre l'altitude de 20 m, on apprend de même au lycée à résoudre l'équation $100t - 9,81 \frac{t^2}{2} = 20$. C'est une **équation algébrique du second degré**.

On a également des renseignements assez précis pour les solutions d' **équations algébriques de degré supérieur**, comme $x^3 - 6x = 4$ ou $x^8 + 3x^6 - 2x^2 = 1$. Leurs solutions sont des nombres que l'on peut calculer, parfois exactement, parfois par une approximation précise.

Le problème se complique si l'on cherche à étudier la population d'une colonie d'insectes. Cette fois, la solution n'est plus un nombre mais une fonction, décrivant le nombre d'individus $f(t)$ à chaque instant t . Plus il y a d'individus, plus l'accroissement (le nombre de naissances par secondes à l'instant t) est rapide. Cet accroissement est noté $f'(t)$ et appelé en mathématiques la dérivée de f à l'instant t . Il y a donc une relation entre la fonction f et sa dérivée f' , par exemple du type $f'(t) = f(t)/100$ si le taux de naissance est 1%. C'est ce qu'on appelle une **équation différentielle du premier ordre** (elle fait intervenir la fonction et sa première dérivée). Il est remarquable que cette seule relation suffise à connaître à chaque instant la population $f(t)$, si l'on connaît seulement le nombre d'individus $f(0)$ à l'instant $t = 0$. La solution utilise la fonction exponentielle : $f(t) = f(0)e^{t/100}$.

De même, la trajectoire d'une planète est une fonction décrivant sa position $f(t)$ à chaque instant t . La dérivée $f'(t)$ mesure la vitesse à l'instant t , et la dérivée seconde $f''(t)$ est l'accélération. Or, la loi de la gravitation fait que l'accélération de la planète dépend simplement de sa position (par rapport au soleil ou aux différents corps qui l'attirent). Il y a ainsi une relation entre la fonction f et sa dérivée seconde f'' : cette relation est une **équation différentielle du second ordre**. Encore une fois, la fonction f (c'est-à-dire la trajectoire entière) est complètement déterminée par les conditions initiales (position et vitesse à l'instant $t = 0$). Mais trouver une formule pour calculer cette fonction n'est pas si simple :

Les équations **différentielles** sont en général beaucoup plus difficiles à résoudre que les équations **algébriques**.

L'outil de Laplace

La transformation de Laplace est une sorte de traducteur qui transforme un problème d'équations différentielles en un problème d'équations algébriques. Après résolution de ce dernier problème (*a priori* plus facile), la "transformation de Laplace inverse" (le dictionnaire pris à l'envers) permet finalement de résoudre le problème de départ.

Mathématiquement, la transformation de Laplace est un opérateur qui à une fonction f associe une autre fonction $F = \mathcal{L}f$ définie par

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Et il existe même une transformation inverse permettant de retrouver f à partir de F .

La propriété essentielle du point de vue des équations différentielles est que la dérivation de la fonction F correspond à la multiplication de la fonction f par la variable : si $g(t) = -tf(t)$, alors $\mathcal{L}g = (\mathcal{L}f)'$.

On en déduit par exemple que si $F = \mathcal{L}f$, alors la fonction $3F'' - 7F' + F$ est la transformée de Laplace de la fonction h définie par $h(t) = (3t^2 + 7t + 1)f(t)$. Ainsi pour résoudre l'équation différentielle $3F'' - 7F' + F = 0$, il suffit de trouver les solutions de l'équation algébrique $3t^2 + 7t + 1 = 0$ puis d'appliquer la transformation de Laplace inverse.