Laplacien et équation de Laplace

Le laplacien d'une fonction f mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. On le note $\Delta(f)$.

Il est nul, ou assez petit, lorsque la fonction varie sans à-coup.

C'est le cas pour la fonction donnant la luminosité des points d'une image constituée d'un dégradé de gris régulier. Ou pour la température des points d'une plaque métallique chauffée en certains points et refroidie en d'autres points, lorsque l'équilibre est atteint. Ou encore pour le potentiel de gravitation dû au soleil, en chaque point du systèe solaire.

Ces fonctions vérifiant **l'équation de Laplace** $\Delta(f) = 0$ sont dites **harmoniques**.

Du point de vue mathématique, le laplacien est défini en terme des dérivées partielles de f. Si f est une fonction de 2 variables x, y, alors $\Delta(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et en général pour une fonction de n variables x_i, il vaut $\Delta(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

La première occurence de l'équation de Laplace apparaît dans un mémoire sur l'attraction des sphéroïdes en 1782, sous une forme compliquée due au système de coordonnées polaires qu'il utilisait.

Mais il reconnaît son importance : *"Nous verrons toute la théorie des attractions des sphéroïdes très peu différents de la sphère découler de cette équation fondamentale.*

Des exemples de fonctions harmoniques sont donnés par les parties réelles de fonctions holomorphes d'une variable complexe. On peut aussi en construire par la transformation de Kelvin qui à une fonction f associe $g : x \longmapsto ||x||^{2-n} f\left(\frac{x}{||x||^2}\right)$. Si f est harmonique, alors g également, et en général $\Delta g(x) = ||x||^{-2-n} \Delta f\left(\frac{x}{||x||^2}\right)$.

On peut résoudre l'équation de Laplace avec conditions aux limites (par exemple trouver la température en chaque point d'une plaque métallique dont on impose la tempréature en certains points) par un algorithme itératif (approximations de Gauss-Seidel) consistant à chaque pas à remplacer la valeur de f en un point du plan discrétisé par la moyenne des points voisins au pas précédent.