Un Bref aperçu sur l'utilisation de la Transformée de Laplace en théorie des nombres

D. ESSOUABRI
Université de Caen, UFR Sciences (Campus II),
Département de Mathématiques,
Bd. du Marechal Juin, B.P. 5186,
14 032 Caen cedex, France.
e-mail: essoua@math.unicaen.fr

1 Introduction, références et notations:

En Mathématiques, trois transformées existent et jouent un rôle fondamentale: La transformée de Fourier, la transformée de Laplace et la transformée de Mellin. Ces trois transformées sont liées entre elles et on peut passer de l'une à l'autre assez facilement.
Étant donné un objet f, qui est assez complexe à étudier directement (par exemple f est une fonction pas assez regulière), le rôle de ces transformées est d'associer à f un autre objet Tf d'une autre nature mais qui est plus régulier et qui se prête mieux à l'analyse (i.e on dispose de théories convenables pour l'étudier!). Une fois l'étude de Tf est faite et ses mystères élucidés, on lui applique la transformée inverse (i.e. la reciproque!) et à l'aide d'une formule qu'on peut représenter grossièrement par $f = T^{-1}Tf$, on traduit les propriétés de Tf en termes de propriétés concernant cette fois-ci l'objet de départ f. Cette idée devenue habituelle depuis longtemps est fondamentale et a permis de faire des progrés dans pas mal de sujets en mathématiques, en physiques, etc... Nous nous limiterons ici à illustrer ceci dans le cas de la transformée de Laplace et plus précisément à l'utilisation de celle-ci en théorie des nombres.
Plus précisément, nous commençons par définir et donner quelques propriétés de l'intégrale de Riemann-Stieltjes, des transformées de Laplace et de Laplace-Stieltjes. Nous expliquons ensuite comment la transformée de Laplace-Stieltjes permet de ramener plusieurs problèmes arithmétiques à l'etude analytique d'objets appellés séries de Dirichlet et nous donnons une brève esquisse de la théorie concernant ces séries, en particulier nous rappellerons certaines propriétés de la plus célèbre des séries de Dirichlet qui est la fonction Zêta de Riemann et nous donnerons deux théorèmes tauberiens qui permettent d'interpréter l'information sur une série de Dirichlet en des propriétés concernant le problème arithmétique de départ. Enfin, nous donnons une démonstration du théorème des nombres premiers (théorème qui concerne la répartition de ces nombres).
Il est à rappeler que le but de cette note est de donner une introuduction rapide

et simple (voire simplificatrice!) à ce beau sujet en espérant que ca fera naître des vocations chez les collègues! Tous les résultats (à part ceux de §4.2.3) sont classiques et le lecteur désirant les approfondir peut consulter par exemples les livres suivants: Ten95], [Ti-HB86], [Ivic85]. Le premier contient une étude détaillé de l'intégrale de Stieltjes et le dernier un exposé exhaustif des propriétés fines de la fonction zêta de Riemann.
Quant à la partie §4.2.3 le lecteur peut consulter par exemple les articles suivants: [BM90], [BT95a], [BT95b], [CN83], [CN86], [Ess97], [Ess98], [Lic94], [Lic97], [Pey97], [Pey?], [Sar84], [Sar87].

Notations:

Dans toute la suite les symboles:

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \ll_{\mathbf{y}} \quad g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \Lambda)$$

$$f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0_{\mathbf{y}}\left(g(\mathbf{x})\right) \quad (\mathbf{x} \in X,\ \lambda \in \Lambda)$$

ont le même sens et signifie qu'il existe $A = A(\mathbf{y}) > 0$, ne dépendant ni de $\mathbf{x}$ ni de λ, mais pouvant à priori dépendre de tous les autres paramètres du problème considérés en particulier de $\mathbf{y}$, et tel que:

$$\forall \mathbf{x} \in X \ et \ \forall \lambda \in \Lambda \quad |f(\lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq A g(\mathbf{x})$$

Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$. On note enfin, pour $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + i\tau$ où $\sigma = \Re(s)$ et $\tau = \Im(s)$.

2 Transformée de Laplace et transformée de Laplace-Stieltjes:

2.1 Quelques rappels sur l'intégrale de Riemann-Stieltjes:

Définition 1 *Soient f et α deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute subdivision $\sigma = \{a = x_0 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vérifiant $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1,..,n\}$, on pose:*

$$S(\sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right).$$

Si $S(\sigma, \xi)$ converge vers une constante L quand $\sup_{i=1,..,n}(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0$ uniformément en les autres paramètres. On dit que f est <u>Riemann-Stieltjes intégrable</u> par rapport à α et on note alors $L = \int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$.

L'intégrale de Riemann-Stieltjes possède les propriétés standard de l'intégrale de Riemann classique notamment la linéaritè et si α est croissante par exemple on a aussi la positivité. De plus, on a les propriétés importantes suivantes:

Proposition 1

1. *Si l'une des deux fonctions f et α est continue et l'autre est à variation bornée sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$ existe;*

2. *La formule d'intégration par parties suivante:*

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\ df(x)$$

est valable si au moins l'une des deux intégrales est définie (l'autre le sera automatiquement);

3. *Si f est continue et α est absolument continue (donc dérivable presque partout) sur $[a, b]$, alors:*

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\ dx;$$

4. *Si f est continue sur $[a, b]$ et α est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et qui posséde des sauts $c_1, \dots, c_k$ aux points $x_1, \dots, x_k$ de $[a, b]$, alors:*

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i)c_i.$$

Remarque: Comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, on définit par linéarité l'intégrale de Riemann-Stieltjes pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, par passage à la limite on définit aussi l'intégrale de Riemann-Stieltjes généralisée (i.e. bornes infinies par exemple).

3 Transformée de Laplace et transformée de Laplace-Stieltjes:

Définition 2 *Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On appelle transformée de Laplace la fonction définie par: $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\ dt$, pour $s \in \mathbb{C}$ lorsque l'intégrale converge.*

Si par exemple f est à croissance au plus exponentiel i.e s'il existe deux constantes M et α tel que: $|f(t)| \leq M\ e^{\alpha t}$, pour tout $t \geq 0$, alors $s \mapsto \mathcal{L}(f)(s)$ est définie et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \alpha\}$.

Définition 3 *Soit α une fonction définie et est à variation bornée sur tout intervalle fermé borné de $[0, +\infty[$. On définit sa transformée de Laplace-Stieltjes par: $\mathcal{LS}(\alpha)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)\ s \in \mathbb{C}$*

Voici maintenant quelques propriétés importantes de la transformée de Laplace-Stieltjes:

Proposition 2

1. *Si $\mathcal{LS}(\alpha)(s)$ converge en $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ alors elle converge et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > \sigma_0\}$. Le meilleur σ_0 possible est appelé l'abscisse de convergence de $\mathcal{LS}(\alpha)$. En plus la convergence est uniforme dans tout secteur de la forme:*
$$\mathcal{S}_\phi = \{s \in \mathbb{C} \mid |Arg(s - s_0)| \leq \phi\} \quad (\phi \in [0, \frac{\pi}{2}[);$$
2. *Si l'intégrale définissant $\mathcal{LS}(\alpha)(s)$ converge absolument pour $s = s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, alors elle converge absolument et uniformément dans le demi plan $\{\Re(s) \geq \sigma_0\}$.*

Comme nous le verrons sur des exemples, nous cherchons souvent à montrer l'existence du prolongement méromorphe de $\mathcal{LS}(\alpha)(s)$ et à étudier ses propriétés puisque ce prolongement et surtout ses singularités contiennent l'information!. D'où l'intérêt du résultat suivant qui est dû à Landau:

Proposition 3 *Si la fonction α est croissante sur $[0, +\infty[$ alors sa transformée de Laplace-Stieltjes $\mathcal{LS}(\alpha)(s)$ possède une singularité en son abscisse de convergence.*

4 Application de la transformée de Laplace-Stieltjes en théories des nombres:

4.1 Introduction et quelques résultats élémentaires de base:

Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction arithmétique qu'on supposera, pour simplifier, vérifiant : $f(n) \ll n^D$ pour n assez grand et soit D une constante quelconque.
Souvent f est très irregulière et son étude directe est difficile voire même impossible. Pour palier à cette difficulté on l'étudie en moyenne ce qui donne des résultats assez satisfaisant. On introduit pour ceci la fonction: $t \mapsto A(t) = \sum_{n<t} f(n) \quad (t > 0)$ et on cherche à comprendre le comportement de $A(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Or via la transformée de Laplace-Stieltjes ceci revient à etudier un autre problème de nature analytique et qui consiste à prolonger méromorphiquement et à comprendre les singularités de la série de Dirichlet suivante:
$s \mapsto Z(f; s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. En effet, d'après le point 4 de la proposition 1 il est facile de voir que: pour $\Re(s) > 1 + D$ on a:
$$Z(f; s) = \mathcal{LS}\left(A(e^t)\right)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dA(e^t).$$

On notera dans la suite par σ_c l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(f;s)$. On appellera abscisse de convergence absolue de $Z(f;s)$ l'abscisse de convergence de $Z(|f|;s)$ et on le notera σ_a.
Un calcul de transformée de Laplace inverse classique permet de déduire le résultat taubérien important suivant:

Proposition 4 *Soit $\alpha > max(0, \sigma_c)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$ on a:*

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} Z(f;s)t^s\frac{ds}{s}.$$

Pour utiliser cette formule il faut d'abord la rendre effective ce qui fait l'objet de la proposition suivante:

Proposition 5 *(Seconde formule de Perron effective)*
Soit $Z(f;s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue fini σ_a. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha \geq 0$ et une fonction g croissante sur $[1, +\infty[$ tels que:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(n)| \leq g(n)$;
2. $Z(|f|;s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma - \sigma_a)^{-\alpha} \quad (\sigma > \sigma_a)$.

Alors, pour $x \geq 1$, $T \geq 2$ et $\beta = \sigma_a + \frac{1}{\ln(x)}$:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - iT}^{\beta + iT} Z(f;s)x^s\frac{ds}{s} \; + O\left(\frac{x^{\sigma_a}\ln(x)^\alpha}{T} + g(2x) + \frac{xg(2x)\ln(T)}{T}\right).$$

Remarque :

La formule de Perron effective est un moyen très efficace pour déterminer le comportement de $A(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$. En effet si on sait prolonger méromorphiquement $s \mapsto Z(f;s)$ à gauche de son demi-plan de convergence $\{\Re(s) > \sigma_c\}$ et si on a des estimations raisonnables de la croissance et de la répartition des pôles de son prolongement, alors en déplaçant la droite d'intégration dans la formule de Perron vers la gauche, on obtient à l'aide du théorème des résidus un développement limité de $A(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$. La longueur de ce développement dépend de la qualité des estimations de croissance du prolongement de $Z(f;s)$ et du degré de précision qu'on a sur ses pôles.

4.2 Quelques exemples de fonctions arithmétiques et leurs séries de Dirichlet associées:

4.2.1 Quelques généralités-le cas des fonctions arithmétiques multiplicatives:

Sur l'ensemble des fonctions arithmétiques $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, on a deux lois de compositions internes naturelles $+$ et $*$ définies par: $(f+g)(n) := f(n) + g(n)$ et

$f * g(n) := \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ qui font de $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ un anneau commutatif unitaire dont l'élément unité est la fonction δ définie par $\delta(n) = 0$ si $n \geq 2$ et $\delta(1) = 1$.
De plus, il est clair que si $Z(f; s)$ et $Z(g; s)$ convergent alors:

1. $Z(f + g; s)$ converge et $Z(f + g; s) = Z(f; s) + Z(g; s)$;

2. $Z(f * g; s)$ converge et $Z(f + g; s) = Z(f; s)Z(g; s)$ si en plus l'une au moins des deux séries $Z(f; s)$ ou $Z(g; s)$ est absolument convergente.

Définition 4 *Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction arithmétique. On dit que f est multiplicative (resp. additive) si pour tout m et n entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a: $f(mn) = f(m)f(n)$ (resp. $f(mn) = f(m) + f(n)$).*

Les fonctions multiplicatives ont la propriété remarquable suivante qui facilite énormément leur étude:

Proposition 6 *Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction arithmétique multiplicative et soit $s \in \mathbb{C}$. Alors, la série de Dirichlet $Z(f; s)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{p\, premier} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right|$ est convergente. Dans ce cas on a:*

$$Z(f; s) = \prod_{p\, premier} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right).$$

Exemples classiques:

Commençons par la plus simple et la plus célèbre des śeries de Dirichlet qui est la fonction "zeta de Riemann" définie par: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. C'est la série de Dirichlet associée à la fonction arithmétique $\mathbf{1}(n) \equiv 1$. Comme cette dernière est multiplicative alors de la proposition 6, on déduit facilement la formule remarquable suivante dite formule d'Euler:

Proposition 7 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *a pour abscisse de convergence 1 et pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 1$ on a:*

$$\zeta(s) = \prod_{p\, premier} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \qquad (\textit{ formule d'Euler}).$$

Il y a aussi les fonctions arithmétiques classiques suivantes:

1. $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$ = le nombre des diviseurs positifs de n. τ est multiplicative et vérifie $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$ et donc d'après la proposition 6, la série de Dirichlet qui lui est associée vérifie pour $\Re(s) > 1$:

$$Z(\tau; s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = Z(\mathbf{1} * \mathbf{1}; s) = Z(\mathbf{1}; s)^2 = \zeta(s)^2;$$

2. $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ = la somme des diviseurs positifs de n. σ est multiplicative et il est clair que $\sigma = Id * \mathbf{1}$. On en déduit alors comme ci-dessus que: $Z(\sigma; s) = \zeta(s)\zeta(s-1)$, pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 2$;

3. La fonction de Mobius définie par

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'a pas de facteur carré} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

($\omega(n)$ étant le nombre de facteurs premiers distincts de n).
Il est clair que μ est multiplicative et que $\mu * \mathbf{1} = \delta$ (par multiplicativité, il suffit de le vérifier pour les puissances des nombres premiers). Donc $Z(\mu; s) = \zeta(s)^{-1}$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(s) > 1$;

4. La fonction indicatrice d'Euler définie par $\varphi(n) = \sum_{\substack{d \text{ premier avec } n \\ d \leq n}} 1$ = le nombre des entiers positifs inérieurs à n et premiers avec n. φ est multiplicative et vérifié $\varphi = \mu * Id$. On en déduit que, pour $\Re(s) > 2$ on a:

$$Z(\varphi; s) = \zeta(s)^{-1}\zeta(s-1);$$

5. La fonction de Von Mangoldt définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si il existe } p \text{ premier et } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = p^k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction Λ n'est pas multiplicative mais elle vérifie $\Lambda = -\mu \ln * \mathbf{1}$. En prenant la dérivée logarithmique des deux membres de la formule d'Euler cidessus, on obtient facilement que $Z(\Lambda; s) = -\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, pour $\Re(s) > 1$.

Remarque:

En conclusion, on peut dire que la transformée de Laplace définit un isomorphisme entre l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ muni de $+$ et $*$ et l'anneau des séries de Dirichlet formelles. Un résultat classique stipule que cet anneau est factoriel et il est facile de voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction arithmétique f soit inversible dans cet anneau est que $f(1) \neq 0$.

4.2.2 Quelques propriétés de la fonction zêta de Riemann:

Comme on a vu dans les exemples, la fonction zêta de Riemann définie pour $\Re(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ joue un rôle très important en théorie des nombres ne serait-ce que parce que plusieurs séries de Dirichlet s'expriment en fonction d'elle. Une autre raison est son lien profond avec la répartition des nombres premiers comme on peut le voir en méditant la remarquable formule d'Euler ci-dessus ou en analysant la démonstration du théorème des nombres premiers dont nous donnerons plus tard une esquisse. Pour une étude exhaustive et assez détaillée de $\zeta(s)$ le lecteur peut consulter [Ivic85]. Nous nous limiterons à rappeler ici quelques propriétés utiles et importantes (pas forcément optimales) de cette fonction:

Proposition 8 *1. La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > 1\}$. De plus son abscisse de convergence qui est aussi son abscisse de convergence absolue est $\sigma_a = \sigma_c = 1$. En outre, elle possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec un seul pôle en $s = 1$. Ce pôle est simple et de résidu égale à 1;*

2. *$\zeta(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante:*

$$\zeta(s) = \left(2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right) \zeta(1-s)$$

où Γ est la fonction Γ d'Euler;

3. *$\zeta(s)$ est d'ordre fini sur les bandes verticales. Plus précisement si on définit pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, $\mu(\sigma)$ comme la borne inférieure des exposants α vérifiant $\zeta(s) \ll_\sigma |\tau|^\alpha$ uniformément en $|\tau| \geq 1$, alors $\sigma \mapsto \mu(\sigma)$ est une fonction convexe et décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus on a:*

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & si\ \sigma \geq 1 \\ \frac{1}{2} - \sigma & si\ \sigma \leq 0 \end{cases} \qquad et \qquad \mu(\sigma) \leq \begin{cases} \frac{1-\sigma}{3} & si\ \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ \frac{3-4\sigma}{6} & si\ 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. *Il existe $c > 0$ tel que $\zeta(s)$ n'a aucun zéro dans la région:*

$$\left\{ s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq 1 - \frac{c}{2 + |\tau|} \right\}.$$

De plus dans cette région on a les estimations suivantes:

$$\zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \frac{1}{\zeta(s)} \ll \ln(|\tau|) \qquad et \qquad |Log(\zeta(s))| \leq \ln\ln(|\tau|) + O(1)$$

uniformément en $|\tau| \geq 3$.

4.2.3 Comptage des point rationnels:

Dans plusieurs problèmes (Géométrie arithmétique par exemple) on est amené à estimer la densité des points rationnels d'une variété donnée. Dans plusieurs cas après plongement on se ramène au problème suivant:
Étant donné un semi-algébrique A de $\mathbb{R}^n$ (sous ensemble défini par des inégalités

et des égalités concernant une famille finie de polynômes) et une fonction hauteur h (qui contrôle par exemple la taille des points). Une question naturelle se pose: Quel est le comportement quand $t \longrightarrow +\infty$ du nombre des points $\mathbf{m}$ de $A \cap \mathbb{Z}^n$ vérifiant $h(\mathbf{m}) < t$? De façon plus précise on essaye d'estimer quand $t \longrightarrow +\infty$ la fonction $N(t) = \#\{\mathbf{m} \in A \cap \mathbb{Z}^n \mid h(\mathbf{m}) < t\}$. Là aussi et encore une fois la transformée de Laplace-Stieltjes est cruciale. En effet, un calcul facile utilisant ce qui précède montre formellement qu'on a:

$$\mathcal{LS}\left(N(e^t)\right)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dN(e^t) = \sum_{\mathbf{m} \in A \cap \mathbb{Z}^n} \frac{1}{h(\mathbf{m})^s} =: Z(A, h; s).$$

Et via la transformée de Laplace-Stieltjes le problème est ramené à étudier l'existence et les propriétés du prolongement méromorphe de la série de Dirichlet: $s \mapsto Z(A, h; s)$. Ce qui est au moins dans le cas qu'on sait traiter (voir [Ess97] et [Ess98] par exemple) est lié aux singularités de A et h à l'infini ainsi qu'à la façon dont les points rationnels s'accumulent au voisinage de ∂A. L'étude de $Z(A, h; s)$ dans le cas où A est un quadrant de la forme $[1, +\infty[^n$ est plus classique (voir [Ess97] pour l'historique et les résultats récents) mais déjà ce cadre contient, suite au travaux de Shintani (voir [CN83] par exemple), les fonctions zêta de Dedekind etc... dont le rôle en théorie des nombres n'est plus à justifier!.
Nous ne développerons pas ici les méthodes utilisées dans ce probéme qui sont de nature géométrique et qui surtout nous emmèneront loin du propos de cet apercu!

4.3 Application à la distribution des nombres premiers (théorème des nombres premiers):

Les nombres premiers jouent un rôle fondamental en arithmétique d'où la nécessité de comprendre leur distribution. Plus précisément on cherche à comprendre le comportement quand $x \longrightarrow +\infty$ de $\pi(x) = \#\{p \text{ premier } \leq x\}$. Gauss avait conjecturé que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)}$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Ce résultat remarquable a été démontré indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896. Le but de ce paragraphe est de donner une esquisse de la démonstration de la version plus précise suivante:

Théorème 1 *[des nombres premiers] Il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\pi(x) = li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right) \qquad \textit{quand } x \longrightarrow +\infty.$$

où $\qquad li(x) = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)} \qquad (x > 2).$

Remarque:
La fonction li est facile à évaluer et des intégrations par parties faciles montrent que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$li(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(k-1)!x}{\ln(x)^k} + O_N\left(\frac{x}{\ln(x)^{N+1}}\right) \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Le théorème 1 découle facilement, comme on va le voir dans la suite, par intégration par partie de la proposition suivante:

Proposition 9 *Soit Λ la fonction de Von Mangoldt définie dans §4.2.1. Il existe une constante $c > 0$ telle que:*

$$\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right) \qquad \textit{quand } x \longrightarrow +\infty.$$

et

$$H(x) = \sum_{p \textit{ premier } <x} \ln(p) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right) \qquad \textit{quand } x \longrightarrow +\infty.$$

4.3.1 Démonstration la proposition 9:

Commençons d'abord par l'étude de $\psi(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n)$.
On sait (voir §4.2.1) que $Z(\Lambda; s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, pour $\Re(s) > 1$. De plus, il est clair que$\Lambda(n) \leq \ln(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et d'après **??**:

$$Z(\Gamma; \sigma) = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \ll (\sigma - 1)^{-1} \quad (\sigma > 1).$$

Donc si on applique la formule de Perron effective (voir proposition 5) avec $g(x) = \ln(x)$ et $\alpha = 1$. on obtient pour tout $T \geq 2$:

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - iT}^{\beta + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds + O\left(\ln(x) + \frac{x\ln(x)\ln(T)}{T}\right).$$

où $\beta = 1 + \frac{1}{\ln(x)}$.
Soit $x > 1$ et $T \geq 2$ fixés mais quelconques. La proposition 8 montre qu'il existe $c' > 0$ telle que la fonction $s \mapsto -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ est méromorphe au voisinage du rectangle $\{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid 1 - \frac{c'}{\ln T} \leq \sigma \leq \beta = 1 + \frac{1}{\ln(x)} \text{ et } |\tau| \leq T\}$ et qu'elle y possède un seul pôle en $s = 1$. Ce pôle est simple et de résidu égale à 1. Donc une application standard du théorème des résidus implique que:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - iT}^{\beta + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds = x - \frac{1}{2\pi i} \int_{R_1 \cup R_2 \cup R_3} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

où

1. R_1 est le segment reliant le point d'affixe $\beta - iT$ au point d'affixe $1-\frac{c'}{\ln T}-iT$;
2. R_2 est le segment reliant le point d'affixe $1-\frac{c'}{\ln T}-iT$ au point d'affixe $1-\frac{c'}{\ln T}+iT$;
3. R_3 est le segment reliant le point d'affixe $1-\frac{c'}{\ln T}+iT$ au point d'affixe $\beta + iT$;

Et comme d'après la proposition **??** on a: $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln T$ sur $R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Alors d'une part on a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_1\cup R_3}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds \ll \ln(T)\int_{1-\frac{c'}{\ln T}}^{\beta}\frac{x^\sigma}{|s|}d\sigma \ll \ln(T)\int_{1-\frac{c'}{\ln T}}^{\beta}\frac{x^\sigma}{T}d\sigma \ll x^\beta\frac{\ln(T)}{T} \ll x\frac{\ln(T)}{T}.$$

Et d'autre part on a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds \ll \ln(T)\int_{-T}^{+T}\left|\frac{x^{1-\frac{c'}{\ln T}+i\tau}}{1-\frac{c'}{\ln T}+i\tau}\right|d\tau \ll \ln(T)x^{1-\frac{c'}{\ln T}}\int_1^T\frac{d\tau}{\tau} \ll (\ln T)^2x^{1-\frac{c'}{\ln T}}.$$

On en déduit alors facilement quand $x \longrightarrow +\infty$, que :

$$\psi(x) = x + O\left((\ln T)^2 x^{1-\frac{c'}{\ln T}} + \frac{x\ln(x)\ln(T)}{T}\right).$$

Maintenant on utilise l'uniformité en $T > 2$ et on optimise de façon standard. Ce qui nous conduit au choix de $T = e^{\sqrt{c'\ln(x)}}$ et avec ce choix il est facile de voir que pour $c \in]0, \sqrt{c'}[$ on a: $\psi(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right)$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Ce qui termine la démonstration du résultat concernant $\psi(x) = \sum_{n<x}\Lambda(n)$.

Étude de $H(x) = \sum_{p \text{ premier } <x}\ln(p)$:
On a pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{n<x}\Lambda(n) = \sum_{p \text{ premier }, k\in\mathbb{N}^* \text{ et } p^k<x}\ln(p)\\
&= \sum_{p \text{ premier } <x}\ln(p) + \sum_{k=2}^{\left[\frac{\ln(x)}{\ln 2}\right]}\sum_{p \text{ premier } <x^{\frac{1}{k}}}\ln(p)\\
&= H(x) + O\left(\sum_{k=2}^{\left[\frac{\ln(x)}{\ln 2}\right]}\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}}\ln(x)\right)\\
&= H(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\sum_{k=2}^{\left[\frac{\ln(x)}{\ln 2}\right]}\frac{1}{k}\right)\\
&= H(x) + O\left(\sqrt{x}(\ln(x))^2\right).
\end{aligned}$$

Et ceci plus le résultat qu'on a établi pour $\psi(x)$, implique que:

$$H(x) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right) \qquad \text{quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition 9.

4.3.2 Fin de la démonstration du théorème 1:

On reprend les notations de la proposition 9 et on pose:
$\tilde{H} = H(x) - x = O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}}\right)$. En utilisant les proprietés standard de l'intégrale de Stieltjes (voir la proposition 1), on obtient:

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{p \text{ premier } <x} 1 = \sum_{p \text{ premier } <x} \frac{1}{\ln(p)} \ln(p) \\
&= \int_{2^-}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dH(t) \\
&= \int_{2^-}^{x} \frac{1}{\ln(t)} \left(dt + d\tilde{H}(t)\right) \\
&= li(x) + \int_{2^-}^{x} \frac{1}{\ln(t)} d\tilde{H}(t) \\
&= li(x) + \frac{\tilde{H}(x)}{\ln(x)} + \int_{2^-}^{x} \frac{\tilde{H}(t)}{t\ln(t)^2} dt \\
&= li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}} + \int_{2^-}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2}\right).
\end{aligned}$$

Or il est clair que:

$$\int_{2^-}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2} = \int_{2^-}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2} dt + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2} dt = O(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2} dt.$$

Et

$$0 < \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\ln(t)}}}{\ln(t)^2} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^{-\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(x)}}}{\frac{1}{4}\ln(x)^2} dt \ll xe^{-\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(x)}}$$

On en déduit que:

$$\pi(x) = li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln(x)}} + \sqrt{x} + xe^{-\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(x)}}\right) = li(x) + O\left(xe^{-\frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(x)}}\right).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Références:

- [BM90] **V.V. Batyrev and Y.I. Manin,** *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques.* Math. Ann. 286 (1990), p.27-43;

- [BT95a] **V.V. Batyrev and Y. Tschinkel,** *Manin conjecture for toric varieties.* Prépublication M/95/93, IHES (1995);

- [BT95b] **V.V. Batyrev and Y. Tschinkel,** *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori.* Internat. Math. Res. Notices 12 (1995), p. 591-635;

- [CN83] **Pi. Cassou-Noguès,** *Prolongement de certaines séries de Dirichlet.* Americain Journal of Mathematics, 105 (1983), p.13-58;

- [CN86] **Pi. Cassou-Noguès,** *Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées.* Journal of Number Theory, 23 (1986);

- [Ess97] **D. Essouabri,** *Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et application à la théorie analytique des nombres.*Annales de l'institut Fourier, Vol.47, 2 (1997),p.429-484;

- [Ess98] **D. Essouabri,** *Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet à support dans un sous ensemble semi-algébriques de* $\mathbb{R}^n$. Compositio Mathematica, 114 (1998), p.219-261;

- [Ivic85] **A. Ivic,** *The Riemann zeta function.* Wiley-Interscience, New York, 1985;

- [Lic94] **B. Lichtin,** *Volumes and lattice points, proof of a conjecture of L. Ehrenpreis* dans "Singularités". London Mathematical Society Note n^o201, Cambridge University Press, Cambridge (1994);

- [Lic97] **B. Lichtin,** *Asymptotic determined by pairs of additive polynomials.* Compositio Math., 107-3 (1997), P.233-268;

- [Pey95] **E. Peyre,** *Hauteurs et et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano.* Duke Math. J., 79-1 (1995), p.101-218;

- [Pey?] **E. Peyre,** *Terme principal de la fonction zéta des hauteurs et torseurs universels.* Astérique, à paraitre;

- [Sar84] **P. Sargos,** *Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables.* Ann. Institut Fourier, 34-3 (1984), p.83-123;

- **[Sar87] P. Sargos,** *Séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables.* Thése d'Etat univ. Bordeaux I (1987);

- **[Ten95] G. Tenenbaum,** *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours spécialisés, collection SMF, n^o1 (1995);

- **[Ti-HB86] E.C. Titchmarsh second edition revisited by D.R. Heath-Brown,** *The theory of the Riemann zeta function.* Calarendon Press, Oxford, 1986.